物理チャレンジ2008

理論問題

2008年**8**月**4**日（月）

理論問題にチャレンジ　**8**：**30**～**13**：**30**

解答と配点

第1問

[I]（11点）

問1 t_1 の間に台車が進んだ距離は vt_1．このときの右のスピーカーの位置は $vt_1 + L$．音はこの時間に速さ V で進むから，

$$Vt_1 = vt_1 + L$$

$\therefore$

$$t_1 = \frac{L}{V - v} \qquad \text{(6点)}$$

問2 時間 $t_2 - t_1$ の間に音が進んだ距離は $L - v(t_2 - t_1)$ だから，

$$V(t_2 - t_1) = L - v(t_2 - t_1)$$

これを $(t_2 - t_1)$ について解くと

$$t_2 - t_1 = \frac{L/V}{1 + v/V} \text{(ここまで3点)}$$

この結果に問1の結果を代入すると，

$$t_2 = \frac{L/V}{1 - v/V} + \frac{L/V}{1 + v/V} \qquad \text{(完成すれば6点)}$$

[II]（16点）

問3 t_1' の間に音波は台車に対して速さ V で距離 L 進むから，

$$t_1' = \frac{L}{V} \qquad \text{(6点)}$$

問4 $t_2' - t_1'$ の間に音は距離 L を速さ V で進むから，

$$t_2' - t_1' = \frac{L}{V} \qquad \text{(6点)}$$

問5 この音波は地面に対して速さ $(V + v)$ で進んだから，問1の V を $(V + v)$ で置き換えて，

$$t_1 = \frac{L}{V} \qquad \text{(6点)}$$

これは問3で計算した t_1' と等しい．

[III]（13点）

問6 問1の V を c で置き換えて，

$$t_1 = \frac{L}{c - v} \qquad \text{(7点)}$$

問 7 **問 2** の V を c で置き換えて，

$$t_2 = \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) L = \frac{2c}{c^2 - v^2} L \qquad (6\text{点})$$

[IV] (35 点)

問 8 (3) 式の両辺を (1) 式と (2) 式を使って書き直すと，

$$\beta(x - vt) = c[at + b(x - vt)]$$

この式の両辺に $x = ct$ を代入して整理すると

$$\beta = \frac{c}{c-v}[a + b(c - v)] \qquad (7\text{点})$$

問 9 $2t'_1 = t'_2$ に，

$$t'_1 = at_1 + b(x_1 - vt_1), \quad t'_2 = at_2 + b(x_2 - vt_2),$$

を代入すると，

$$2[at_1 + b(x_1 - vt_1)] = at_2 + b(x_2 - vt_2)$$

$(x_2 - vt_2) = 0$，$(x_1 - vt_1) = L$,（あるいは，$x_2 = vt_2, x_1 = ct_1$）を代入し，さらに，**問 6** と**問 7** で求めた t_1，t_2 の式を代入すると，

$$b = -\frac{v}{c^2 - v^2} a \qquad (6\text{点})$$

問 10 前問の結果を**問 8** の結果の式に代入すると，

$$\beta = \frac{c^2}{c^2 - v^2} a \qquad (\text{ここまで出来れば}3\text{点})$$

以上の b と β を a を使って表した式を (1) 式と (2) 式に代入すると，

$$x' = \frac{a(x - vt)}{1 - (v/c)^2} \quad t' = a\frac{t - (v/c^2)x}{1 - (v/c)^2} \quad (2) \qquad (\text{ここまで出来れば}5\text{点})$$

となる．この式の $x, t, x't', v$ を $x', t', x'', t'', -v$ で置き換えると

$$x'' = \frac{a(x' + vt')}{1 - (v/c)^2} \quad t'' = a\frac{t' + (v/c^2)x'}{1 - (v/c)^2} \qquad (\text{全部出来れば}7\text{点})$$

問 11

$$\begin{aligned} t'' &= t = a\frac{t' + (v/c^2)x'}{1 - (v/c)^2} = a\left[a\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) + a\left(\frac{v}{c^2}\right)(x - vt)\right]\frac{1}{[1 - (v/c)^2]^2} \\ &= \frac{a^2}{1 - (v/c)^2} t \quad (1) \end{aligned}$$

より

$$a = \sqrt{1-(v/c)^2}.$$

あるいは，(1) の代わりに

$$x'' = x = \frac{a(x'+vt')}{1-(v/c)^2} = \frac{a^2}{[1-(v/c)^2]^2}\left[(x-vt)+v\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\right] = \frac{a^2}{1-(v/c)^2}x$$

を使っても良い．こうして求めた a の表式を問 **10** の (2) 式に代入すると

$$t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (7\text{ 点})$$

問 12 問題に記された近似式より，

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \simeq 1+\frac{v^2}{2c^2} \qquad (1\text{ 点})$$

だから，

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t-(vx/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = t-\frac{v}{c^2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t \qquad (3\text{ 点}) \\ x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = (x-vt)+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2(x-vt) \qquad (2\text{ 点}) \end{aligned}$$

（合計 6 点）

[V] （25 点）

問 13 (6) の左の方程式の解に $t = t_{\mathrm{r}}$ を代入すると，$x = x_1 + c(t_{\mathrm{r}} - t_1)$ ．t_{r} が Δt_{r} の誤差を含むときの x の誤差を Δx とすると，$\Delta x = c\Delta t_{\mathrm{r}}$ ．あるいは，(6) の右の式に代入すると $x = x_2 - c(t_{\mathrm{r}} - t_2)$. これから，$\Delta x = c\Delta t_{\mathrm{r}}$ を出しても良い．(この式を使うとき，$\Delta x = -c\Delta t_{\mathrm{r}}$ を出しても OK とする） （ここまでで 4 点）

$\Delta x < 1\mathrm{m}$ とすると，

$$\Delta t_{\mathrm{r}} < \frac{1\mathrm{m}}{3.0\times 10^8\mathrm{m/s}} = 3.3\times 10^{-9}\mathrm{s} \qquad (6\text{ 点})$$

問 14 $x - x_1 = c(t-t_1)$，$x_2 - x = c(t-t_2)$ を解くと

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{c}{2}(t_1-t_2) \qquad (6\text{ 点})$$

問 15 人工衛星に対して自動車は速度 $(-v)$ で動いているから，

$$x = (x'+vt')\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right], \quad t = (t'+v\frac{x'}{c^2})+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t' \qquad (\text{逆変換までで 3 点})$$

この式に $x'=0$，$t'=t'_1$ を代入して，

$$x_1 = vt'_1\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right], \quad t_1 = \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]t'_1$$

$x'=L$，$t'=t'_2$ を代入して，

$$x_2 = (L+vt'_2)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right], \quad t_2 = \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]t'_2 + v\frac{L}{c^2}$$

これらを問 **14** の結果の式に代入すると，

$$x = \frac{L}{2}\left[1+\frac{v}{c}+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] + \left(\frac{v-c}{2}t'_1 + \frac{v+c}{2}t'_2\right)\left[1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \qquad \text{（6 点）}$$

問 16 $t'_1 = t'_2 = 0$ および $L = 24,000\mathrm{km}$ を代入すると，

$$x = \frac{2.4\times10^7}{2}\times\left(1+\frac{3.8\times10^3}{3.0\times10^8}\right) = \frac{L}{2} + 152\mathrm{m}$$

故に，相対論的効果の補正をしないとカーナビの位置（自動車の位置）には，152m の誤差が出る．　　　（6 点）

第2問

A　(50点)

問1　r_1 は $\mathrm{F_1}$ より P 点（近地点）まで；$\mathrm{F_1P}$、r_2 は $\mathrm{F_1}$ より Q 点（遠地点）まで；$\mathrm{F_1Q}$　(10点)

問2　$r = r_1$，r_2 のとき，$\dot{r} = 0$、即ち，

$$Er^2 + GMmr - 2mV_\mathrm{s}^2 = 0$$

より、r_1，r_2 はこの式の２解であり、また、$r_1 + r_2$ は楕円の長軸の長さに等しいので、解と係数の関係より，

$$2a = r_1 + r_2 = -\frac{GMm}{E}$$

これを E について解くと

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad (10点)$$

問3　近地点 P で，$v_r = \dot{r} = 0$，$v_\phi = r\dot{\phi} = v_1$ であるから，式（4）より，

$$v_1 = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a}\right)} \qquad (10点)$$

問4　$2a \gg r_1$ であるから，$\dfrac{1}{2a}$ の項を無視して，

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{r_1}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_1}} = R\sqrt{\frac{2g}{r_1}} = 1.1 \times 10^4 \mathrm{m/s} = 11 \mathrm{km/s} \qquad (5点)$$

問5　月と「かぐや」の間の万有引力と遠心力のつり合いから，　(10点)

$$v_2 = R_\mathrm{m}\sqrt{\frac{g_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m} + h}}$$

問6　$h = 100\mathrm{km}$ を使って，

$$v_2 = 1.6 \times 10^3 \mathrm{m/s} = 1.6 \mathrm{km/s} \qquad (5点)$$

B (50 点)

問 1 質量と長さ，力から時間の次元を作ればよい．力の次元を知っていればできる．周期を t と記す．$[t]$=[T]=$[m^a][l^b][(F)^c]$=$[\mathrm{M}^a][\mathrm{L}^b][(\mathrm{MLT}^{-2})^c]$ から $a+c=0$，$b+c=0$，$-2c=1$ を得る．これを解いて

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=-\frac{1}{2} \qquad (\text{各 } 2\text{ 点})$$

を得る．周期は

$$t=h\sqrt{\frac{ml}{F(r)}} \qquad (2\text{ 点})$$

となる． （合計 8 点）

問 2 問 **1** で $F(r)$ が分母に来ることがわかった．そうして $F(r)$ は電流に比例する．したがって

$$\frac{t_{2I}}{t_I}=\sqrt{\left(\frac{1}{2I}\right)/\left(\frac{1}{I}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (5\text{ 点})$$

問 3 問 **1** の式において $F(r)=ar^n$ を代入する．r とともに周期が増加しているので指数は正ではありえない．$n=-1$ とすると $t=s\sqrt{r}$（s は定数）．$r=15$，$t=30$ から $s=7.746$ が得られる．$r=20,40,50,60,120$ に対して $t=34.64,48.99,54.77,60.00,84.85$ が得られる．これらは実験値をよく再現している．$n=-2$ とすると $t=sr$．$r=15,t=30$ から $s=2$ が得られ，$r=20,40,50,60,120$ に対して $t=40,80,100,120,240$ となる．実験データは再現されない．$n=-3$，$n=-4$ などはもっと悪くなることはすぐにわかる．よって $n=-1$ が結論される． (7 点)

問 4(1) 式において $\alpha\to\pi,\ \beta\to 0$ の極限をとればよい．そうすると $F(r)=\dfrac{2kI}{r}$ を得る．
(6 点)

問 5(1) 式で $\alpha\to\theta,\ \beta\to 0$ とすると

$$g(r)=\frac{kI}{r}(1-\cos\theta)$$

が得られる． (7 点)

問 6 直線電流の及ぼす力から欠損した部分のそれを差し引けば求める量が得られる．このとき仮想的な“直線電流”の P 点から距離は $r\sin\alpha$ であることに留意する．そうすると

$$V(r)=\frac{2ki}{r\sin\alpha}-\frac{ki(-\cos(\pi-\alpha)+\cos\alpha)}{r\sin\alpha}=\frac{2ki}{r\sin\alpha}(1-\cos\alpha)$$

を得る．この式は

$$\frac{2ki}{r\sin\alpha}(1-\cos\alpha)=\frac{2ki}{r}\tan\frac{\alpha}{2}$$

と書くことも出来る．どちらでもよい． (9 点)

問 **7**

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{ml/(2kI/r)}{ml/[(2ki/r)\tan(\alpha/2)]}} = \sqrt{\frac{i}{I}\tan\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{i\sin\dfrac{\alpha}{2}}{I\cos\dfrac{\alpha}{2}}} \qquad (8\text{ 点})$$

第3問

[I] (13点)

問1

$$2p_F\,2R \;=\; \frac{h}{2}N \qquad\Rightarrow\qquad p_F = \frac{h}{2}\frac{N}{4R} = \frac{h}{8}N\,R^{-1} \qquad (4\text{点})$$

問2

$$\Delta U_d \;=\; \frac{\Delta p\,2R}{h/2}\frac{p^2}{2\,m_e} = \frac{2R\,p^2}{h\,m_e}\Delta p \qquad (4\text{点})$$

問3

$$\begin{aligned} U_d \;&=\; \sum \Delta U_d = \sum \frac{2R\,p^2}{h\,m_e}\Delta p = \frac{2R}{h\,m_e}\int_{-p_F}^{p_F} p^2\,dp = \frac{2R}{h\,m_e}\frac{2\,p_F^3}{3} \\ &=\; \frac{4R}{3h\,m_e}(\frac{h\,N}{8R})^3 = \frac{h^2}{384\,m_e}\,N^3\,R^{-2} \end{aligned} \qquad (5\text{点})$$

[II] (5点)

問4

$$U_d \;=\; \frac{h^2\,N^3}{384\,m}\,R^{-2} \qquad\Rightarrow\qquad -\frac{dU_d}{dR} = \frac{h^2\,N^3}{192\,m}\,R^{-3}$$

ここで，m は粒子の質量，N は粒子の個数である．個数が同じなら，粒子質量の小さい電子の場合の方が縮退圧は大きい．従って，縮退圧で支えている粒子は電子であることが判る．電子の縮退圧は陽子の縮退圧に比べて 1830 倍大きい．

　別に R で微分しなくても U_d の表式だけを見て同じ結論を導いても間違いとする必要はない (と思う)． (5点)

[III] (8点)

問5

$$\text{運動エネルギー} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{p^2c^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + mc^2}$$

$$\text{非相対論的 運動エネルギー} = E - mc^2 = mc^2(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} - 1) \sim \frac{p^2}{2m} \qquad (4\text{点})$$

$$\text{相対論的 運動エネルギー} \sim pc \qquad (4\text{点})$$

[IV] (22 点)

問 6

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi p_F^3}{3}\,\frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{h^3}{2}N \qquad \Rightarrow k^3\,p_F^3\,R^3 = h^3\,N \\
\Rightarrow p_F &= \frac{h}{k}\,R^{-1}N^{1/3} \qquad\qquad (4\,\text{点}) \\
&= \frac{h}{2}(\frac{9\,N}{4\pi^2})^{1/3}R^{-1} \qquad \underline{\text{これも正解}}
\end{aligned}$$

問 7

非相対論の場合

$$\begin{aligned}
\Delta U_d &= \frac{4\,\pi\,p^2\,\Delta p\,\frac{4\pi}{3}R^3}{h^3/2}\frac{p^2}{2\,m_e} = \frac{\frac{3}{2}k^3\,R^3\,p^2\,\Delta p}{h^3/2}\frac{p^2}{2\,m_e} = \frac{3\,k^3}{2\,h^3\,m_e}R^3\,p^4\,\Delta p \qquad (4\,\text{点}) \\
&= \frac{16\pi^2}{3\,h^3\,m_e}R^3\,p^4\,\Delta p \qquad \underline{\text{これも正解}}
\end{aligned}$$

相対論の場合

$$\begin{aligned}
\Delta U_d &= \frac{4\,\pi\,p^2\,\Delta p\,\frac{4\pi}{3}R^3}{h^3/2}pc = \frac{\frac{3}{2}k^3\,R^3\,p^2\,\Delta p}{h^3/2}pc = \frac{3\,k^3\,c}{h^3}R^3\,p^3\,\Delta p \qquad (4\,\text{点}) \\
&= \frac{32\pi^2 c}{3\,h^3}R^3\,p^3\,\Delta p \qquad \underline{\text{これも正解}}
\end{aligned}$$

問 8

非相対論の場合

$$\begin{aligned}
U_d &= \sum \Delta U_d = \sum \frac{3\,k^3}{2\,h^3\,m_e}R^3\,p^4\,\Delta p = \frac{3\,k^3}{2\,h^3\,m_e}R^3\int_0^{p_F} p^4\,dp = \frac{3\,k^3}{10\,h^3\,m_e}R^3\,p_F^5 \\
&= \frac{3\,k^3}{10\,h^3\,m_e}R^3\,(\frac{h}{k\,R}N^{1/3})^5 = \frac{3}{10\,k^2}\,\frac{h^2}{m_e}\,N^{5/3}\,R^{-2} \rightarrow a = 5/3,\;\; b = -2 \qquad (5\,\text{点})
\end{aligned}$$

相対論の場合

$$\begin{aligned}
U_d &= \sum \Delta U_d = \sum \frac{3\,k^3\,c}{h^3}R^3\,p^3\,\Delta p = \frac{3\,k^3\,c}{h^3}R^3\int_0^{p_F} p^3\,dp = \frac{3\,k^3\,c}{4\,h^3}R^3\,p_F^4 \\
&= \frac{3\,k^3\,c}{4\,h^3}R^3\,(\frac{h}{k\,R}N^{1/3})^4 = \frac{3}{4\,k}\,h\,c\,N^{4/3}R^{-1} \rightarrow a = 4/3,\;\; b = -1 \qquad (5\,\text{点})
\end{aligned}$$

[V] (10 点)

問 9

$$\rho = \frac{3M}{4\pi\,R^3} \qquad \text{密度の計算}$$

$$\begin{aligned}\Delta U_g &= -\frac{G\,m\,\Delta m}{r} = -\frac{G\,\frac{4\pi r^3\rho}{3}\,4\pi r^2\Delta r\,\rho}{r} = -\frac{16\pi^2 G}{3}\,\rho^2 r^4\Delta r \\ &= -\frac{16\pi^2 G}{3}\,(\frac{3M}{4\pi\,R^3})^2 r^4\Delta r = -\frac{3\,G\,M^2}{R^6} r^4\Delta r \qquad (5\text{点})\end{aligned}$$

問 10

$$\begin{aligned}U_g &= \sum \Delta U_g = -\frac{3\,G\,M^2}{R^6}\sum r^4\Delta r \\ &= -\frac{3\,G\,M^2}{R^6}\int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5}\frac{G\,M^2}{R} \qquad (5\text{点})\end{aligned}$$

[VI] (34 点)

問 **11** の解へ行くための準備

非相対論

$$\begin{aligned}U_d &= \frac{3}{10\,k^2}\,\frac{h^2}{m_e}\,N^{5/3}\,R^{-2} \\ &= \frac{3}{10\,k^2}\,\frac{h^2}{m_e}\,(\frac{M}{y m_H})^{5/3}\,R^{-2} \\ &= \frac{3^{7/3}}{5\times 2^{13/3}\,\pi^{4/3}}\frac{h^2}{m_e}(\frac{M}{y\,m_H})^{5/3}\,R^{-2} \qquad k\text{ の表式を入れた場合}\end{aligned}$$

相対論

$$\begin{aligned}U_d &= \frac{3}{4\,k}\,h\,c\,N^{4/3}R^{-1} = \frac{3}{4\,k}\,h\,c\,(\frac{M}{y\,m_H})^{4/3}R^{-1} \\ &= \frac{3^{5/3}}{2^{11/3}\pi^{2/3}}h\,c\,(\frac{M}{y\,m_H})^{4/3}\,R^{-1} \qquad k\text{ の表式を入れた場合}\end{aligned}$$

問 11

U を R の関数とみたときの最小値を求めればよい．

$$U = U_g + U_d = -\frac{3\,G\,M^2}{5}R^{-1} + \frac{3}{10\,k^2}\frac{h^2}{m_e}(\frac{M}{y\,m_H})^{5/3}\,R^{-2}$$

R で微分すれば話は速い．U の最小値を与える R や ρ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{3\,G\,M^2}{5}R &= \frac{3}{5\,k^2}\frac{h^2}{m_e}(\frac{M}{y m_H})^{5/3} \\ R &= \frac{h^2}{k^2\,G\,m_e(y m_H)^{5/3}}M^{-1/3} \qquad (5\text{点}) \\ &= 7.1898\times 10^6(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot})^{-1/3}\mathrm{m} = 1.03302\times 10^{-2}\,\mathrm{R}_\odot(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot})^{-1/3} \qquad (4\text{点}) \\ \rho &= \frac{3\,M}{4\pi R^3} = \frac{3\,M}{4\pi}\frac{k^6\,G^3\,m_e^3(y m_H)^5}{h^6}M \qquad (5\text{点}) \\ &= 1.27825\times 10^9(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot})^2\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \Rightarrow 1.28\times 10^6(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot})^2\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \qquad (4\text{点})\end{aligned}$$

太陽質量の星が縮退して，電子の縮退圧で支えられるようになった白色矮星の密度は高く，角砂糖一つの大きさで一トンほどになる．また，そのときの星の半径は地球程度である．さらに質量が大きいほど半径は小さくなる．

問 12

$$
\begin{aligned}
U &= U_g + U_d = -\frac{3\,G\,M^2}{5} R^{-1} + \frac{3}{4\,k} h\,c\,(\frac{M}{y\,m_H})^{4/3}\,R^{-1} \\
&= \{-\frac{3\,G\,M^2}{5} + \frac{3}{4\,k} h\,c\,(\frac{M}{y\,m_H})^{4/3}\}\,R^{-1} \qquad (4\,点)
\end{aligned}
$$

R^{-1} の係数が正ならば，半径が大きい方が全エネルギーが小さくなるので，星は半径を大きくして，相対論から離れ白色矮星として安定する．R^{-1} の係数が負ならば，半径の小さい方が全エネルギーが小さくなるので，星はドンドン収縮していくため，縮退圧では支えられずに潰れてしまう．　(4 点)

問 13

U の表式で，R に依存しない場合が限界質量 M_{ch} となる．

$$
\begin{aligned}
\frac{3\,G\,M_{ch}^2}{5} &= \frac{3}{4\,k}\,h\,c(\frac{M_{ch}}{ym_H})^{4/3} \\
M_{ch}^{2/3} &= \frac{5\,h\,c}{4\,k\,(y\,m_H)^{4/3}G} \\
M_{ch} &= (\frac{5}{4\,k})^{3/2}\,\frac{1}{(y\,m_H)^2}(\frac{h\,c}{G})^{3/2} \qquad (4\,点) \\
&= \frac{6.92212}{y^2}\,\mathrm{M}_\odot \sim 1.73\,\mathrm{M}_\odot \qquad (4\,点)
\end{aligned}
$$

実際の詳細な計算 (全ての電子が相対論的ではないとか，物質組成とか）に従うと，上の係数は 6.92 $\Rightarrow$ 5.86 となり，チャンドラセカール質量は 1.4 $\mathrm{M}_\odot$ くらいになる．

[VII]　(8 点)

問 14

電子を非相対論的に扱うと，電子の縮退圧で支える星の大きさが出た．この表式で $y \to 1$, $m_e \to m_H$，$M \to$ チャンドラセカール限界質量 とすれば中性子の縮退圧で支える星の大きさが出る．ただし，このあたりになると，相対論的効果が効いてくるが，そのあたりは無視して計算しておく．

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{h^2}{k^2\,G\,m_e(ym_H)^{5/3}} M^{-1/3} \Rightarrow \frac{h^2}{k^2\,G\,m_H^{8/3}} M_{ch}^{-1/3} \\
&= 0.864 \times 10^4 (\frac{M_{ch}}{1.73\,\mathrm{M}_\odot})^{-1/3}\mathrm{m} \qquad (4\,点)
\end{aligned}
$$

ここでは，チャンドラセカール質量を$1.73\,\mathrm{M}_\odot$とした．これは，中性子 (有限の大きさを持つ) を充填したとき (中性子星) の大きさとほぼ一致する．

チャンドラセカール質量を少し超えた中性子星の質量も，少し越えない白色矮星の質量も同じとしてやると，それぞれの表式から次のようになる．

$$\frac{\text{白色矮星の半径}}{\text{中性子星の半径}} \;=\; \frac{h^2}{k^2\,G\,m_e(ym_H)^{5/3}}M^{-1/3}\Big/\frac{h^2}{k^2\,G\,m_H^{8/3}}M^{-1/3} = \frac{m_H/m_e}{y^{5/3}} = 576.4 \qquad (4\text{点})$$

白色矮星の半径は中性子星の半径の約 576 倍となる．